Aufgaben zur Unabhängigkeit von zwei Ereignissen

1 In einem Sporthotel werden die Gäste nach ihren Aktivitäten befragt. Von 800 befragten Hotelgästen waren 160 jünger als 30 Jahre. Von diesen gaben 48 Tennis als ihre Lieblingssportart an. Insgesamt wählten 240 Tennis als ihre bevorzugte Sportart. Für einen zufällig ausgewählten Hotelgast werden die Ereignisse A: „der Hotelgast ist jünger als 30“ und B: „die Lieblingssportart des Gastes ist Tennis“ betrachtet. Untersuchen Sie, ob A und B stochastisch unabhängig sind.

2 Es sind 50 Personen in der Jugendherberge untergebracht. Zum Frühstück gibt es Tee (T) und Orangensaft (O). 40 Personen trinken Tee, 25 Orangensaft und 5 Personen trinken nichts zum Frühstück.
Untersuchen Sie z.B. mit Hilfe einer Vierfeldertafel, ob die Wahl von Orangensaft und Tee stochastisch unabhängig ist. (Abitur 2008 SI)

3.0 Von 200 Kaviar-Käufern kauften in der Woche vor Ostern 130 A-Kaviar. 90 dieser 200 Personen klagten nach dem Verzehr über Unwohlsein (U), darunter 10, die keinen A-Kaviar gegessen hatten. (Abitur 2008 SII)

3.1 Stellen Sie den beschriebenen Sachverhalt mit Hilfe einer Vierfeldertafel dar. Überprüfen Sie rechnerisch, ob die Ereignisse K: „Die Person isst A-Kaviar“ und U: „Es tritt Unwohlsein auf“ stochastisch unabhängig sind. Geben Sie eine mögliche Interpretation Ihres Ergebnisses im Sinne der vorliegenden Thematik.

3.2 Geben Sie mit Hilfe einer Vierfeldertafel ein Zahlenbeispiel Ihrer Wahl an, in dem die beiden Ereignisse K und U stochastisch unabhängig sind und begründen Sie kurz diese Unabhängigkeit.

4.0 Beim Glücksspiel „Roulette“ verwendet man eine drehbare Scheibe mit 36 abwechselnd roten und schwarzen Nummernfächer sowie einem 37. (grünen) Fach für die Null. Die Gewinnzahl wird mit Hilfe einer Kugel ermittelt, die nach Drehung der Scheibe in einem Nummernfach liegen bleibt, wobei alle 37 Zahlen mit gleicher Wahrscheinlichkeit getroffen werden können. (Abitur 2009 SII)
Im Folgenden verstehen wir unter der Farbe einer Zahl die Farbe des zugehörigen Nummernfaches, es gibt also 1 grüne Zahl sowie 18 schwarze und 18 rote Zahlen. Von den Zahlen des ersten Dutzends sind genau sechs rot und sechs schwarz gefärbt. Folgende Ereignisse werden betrachtet:
E_1: „Eine Zahl aus dem ersten Dutzend erscheint.“
E_2: „Eine rote Zahl erscheint.“

4.1 Erstellen Sie in Bezug auf E_1 und E_2 eine Vierfeldertafel und begründen Sie rechnerisch, ob die beiden Ereignisse stochastisch unabhängig sind.

4.2 Berechnen Sie die folgende Wahrscheinlichkeit: $P(E_1 \cup E_2)$.

5.0 Die Eisdiele BAVARIA bietet unterschiedliche Eisbecher an. Aus langjähriger Erfahrung weiß der Eigentümer, dass 60% der Gäste einen Eisbecher mit Fruchteis (F) bestellen. Zudem ist bekannt, dass 70% aller Eisbecher mit Sahne (S) bestellt werden. 10% der Eisbecher werden ohne Fruchteis und ohne Sahne bestellt. (Abitur 2011 SI)

5.1 Untersuchen Sie mithilfe einer Vierfeldertafel, ob die Ereignisse F und S stochastisch unabhängig sind.

5.2 Beschreiben Sie das Ereignis $\overline{\overline{F} \cup S}$ möglichst einfach mit Worten und geben Sie seine Wahrscheinlichkeit an.

6.0 In einer weiteren Befragung von 200 zufällig ausgewählten Personen wurden genau 30 Linkshänder (L) gezählt. Davon waren 9 Frauen (F). Die restlichen 51 Frauen in der Befragung waren Rechtshänder. Die Auswahl einer Person und die Ermittlung ihrer Schreibhand und ihres Geschlechts wird als Zufallsexperiment aufgefasst. (Abitur 2012 SI)

6.1 Ermitteln Sie mithilfe einer Vierfeldertafel die Wahrscheinlichkeiten aller Elementarereignisse des Zufallsexperiments.

6.2 Beschreiben Sie das Ereignis $E = \overline{F \cup \overline{L}}$ möglichst einfach mit Worten und geben Sie dessen Wahrscheinlichkeit an.

6.3 Untersuchen Sie, ob die Ereignisse L und F stochastisch unabhängig sind und interpretieren Sie das Ergebnis im Sinne der vorliegenden Thematik.

7.0 Ein Hautarzt wird ca. zwei Wochen nach der Discounter-Aktion hellhörig, als von seinen 150 Patienten, die ihn innerhalb einer Woche konsultieren, genau die Hälfte mit Hautausschlägen an den Händen (A) zu ihm kommt. Bei seinen Nachforschungen stellt er fest, dass ein Drittel aller Patienten die Handschuhe aus dem Discounter trägt (H), von denen 25 über Hautausschlag klagen. (Abitur 2012 SII)

7.1 Erstellen Sie eine Vierfeldertafel und weisen Sie damit nach, dass das Tragen der Handschuhe aus dem Discounter den Ausschlag an den Händen nicht beeinflusst.

7.2 Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit $P(A \cup \overline{H})$.

8.0 Beim Buchen kann man mit der Kreditkarte (C) oder per Überweisung ($\overline{C}$) zahlen. Bei 140 zufällig ausgewählten Buchungen wurde in 90% die Touristenklasse gebucht. 70% aller Buchungen wurden mit der Kreditkarte bezahlt. Zwei Buchungen der Businessklasse wurden durch Überweisung bezahlt. Die relativen Häufigkeiten werden als Wahrscheinlichkeiten interpretiert. (Abitur 2013 SI)

8.1 Bestimmen Sie mithilfe einer Vierfeldertafel die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse. Rechnen Sie mit exakten Werten.

E_1: „Ein Kunde bucht Touristenklasse oder zahlt nicht mit der Kreditkarte.“

$E_2 = \overline{\overline{C} \cup B}$

Beschreiben Sie das Ereignis E_2 möglichst einfach in Worten.

8.2 Zeigen Sie, dass die Ereignisse B und C stochastisch abhängig sind und erklären Sie, was dies im Sachzusammenhang bedeutet.

9 $\frac{3}{4}$ von 24 Models tragen Schuhe einer bestimmten Marke (M). Neun der Models, die diese Schuhe tragen, klagen über Hautreizungen (H) an den Füßen. Insgesamt hat die Hälfte aller Models keine Hautreizungen.

Prüfen Sie mithilfe einer vollständigen Vierfeldertafel, ob die Ereignisse M und H stochastisch unabhängig sind und interpretieren Sie das Ergebnis im vorliegenden Zusammenhang. (Abitur 2014 SI)

10 In diesem Shop werden ausschließlich Holzkohle- und Gasgrills angeboten. Von 300 im letzten Monat verkauften Grills sind 80 Gasgrills. An Singlehaushalte gingen 30 Gasgrills. Größere Haushalte (zwei und mehr Personen) haben in diesem Zeitraum 180 Holzkohlegrills gekauft.

Untersuchen Sie mithilfe einer Vierfeldertafel, ob der Kauf eines Gasgrills unabhängig von der Haushaltsgröße ist. (Abitur 2014 SII)

11 Beim klinischen Test mit insgesamt 400 Teilnehmern sind bei 12 % Nebenwirkungen (N) aufgetreten. Die Hälfte aller Teilnehmer hat das neue Medikament M bekommen. 168 Personen haben M erhalten und es sind keine Nebenwirkungen aufgetreten.

Untersuchen Sie mithilfe einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel die Ereignisse M und N auf stochastische Abhängigkeit. (Abitur 2015 SI)

12.0 Anna und Eva versuchen ihr Glück an der Schießbude. Sie schießen jeweils einmal. Anna trifft mit einer Wahrscheinlichkeit von 32 % (Ereignis A), Eva mit einer Wahrscheinlichkeit von 65 % (Ereignis E). Die Wahrscheinlichkeit, dass beide treffen, liegt bei 20,8 %. (Abitur 2015 SII)

12.1 Berechnen Sie mithilfe einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den beiden Mädchen

a) keine trifft,

b) genau eine trifft,

c) höchstens eine trifft.

12.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\overline{\overline{A} \cap E}$ und beschreiben Sie dieses Ereignis möglichst einfach in Worten.

12.3 Untersuchen Sie die Ereignisse A: „Anna trifft“ und E: „Eva trifft“ auf stochastische Unabhängigkeit.

13.0 Der Apotheker bietet seinen Kunden nur Hustensaft der Marken A und B an. Von 500 Hustensaftkäufern entscheiden sich 400 für den Hustensaft A. Bei 280 der Kunden, die Hustensaft A kaufen, tritt eine Verbesserung der Symptome ein. Von den Käufern der Hustensaftmarke B geben 30 an, dass keine Verbesserung der Symptome auftritt. (Abitur 2016 SI)

13.1 Stellen Sie für den beschriebenen Sachverhalt eine vollständige Vierfeldertafel auf, überprüfen Sie, ob die Ereignisse
A: „Ein Kunde kauft Hustensaft der Marke A.“ und
V: „Es tritt eine Verbesserung der Symptome auf.“
stochastisch unabhängig sind und interpretieren Sie Ihr Ergebnis im Sinne der vorliegenden Thematik.

13.2 Berechnen Sie $P\left(\overline{A} \cup V\right)$.

14 Betrachtet werden nun folgende Ereignisse:
E_6: „Eine Pfandflasche wurde am Pausenverkauf zurückgegeben.“
E_7: „Eine Pfandflasche enthielt Mineralwasser.“
E_8: „Eine Pfandflasche wurde am Pausenverkauf zurückgegeben und enthielt kein Mineralwasser.“

Dabei gelte: $P(E_6) = 0{,}6$; $P(E_7) = 0{,}3$; $P(E_8) = 0{,}42$
Zeigen Sie, dass die beiden Ereignisse E_6 und E_7 vereinbar und stochastisch unabhängig sind. (Abitur 2016 SII)

15.0 Ein anderer Pizzalieferdienst bietet neben Pizzen auch noch Nudelgerichte (N) an. Aus Erfahrung weiß man, dass 28% aller Kunden Nudelgerichte (N) bestellen, die Restlichen eine Pizza ($\overline{N}$). Bei 3 von 10 Bestellungen wird zusätzlich Salat (S) geordert und bei der Hälfte aller Bestellungen lediglich eine Pizza. (Abitur 2018 SI)

15.1 Bestimmen Sie mithilfe einer vollständigen Vierfeldertafel die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Kunde eine Pizza mit Salat bestellt.

15.2 Zeigen Sie, dass für die Ereignisse N und S gilt: $P\left(N \cap S\right) \neq P(N) \cdot P(S)$.
Deuten Sie das Ergebnis.

16 Während der gesamten Spiele sind 400 Fußballer im Einsatz. 80% von ihnen werden erfahrungsgemäß in Zweikämpfen in regelwidrigen Körperkontakt mit dem Gegner kommen (K). 180 Spieler bekommen eine gelbe Karte als Verwarnung (V), zwei Drittel davon im Zusammenhang mit einem unerlaubten Körperkontakt.
Stellen Sie für den beschriebenen Sachverhalt eine vollständige Vierfeldertafel auf, bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $E_4 = \overline{K \cup \overline{V}}$ und interpretieren Sie E_4 im Sinne der vorliegenden Thematik. (Abitur 2018 SII)

17 Im Rahmen einer Umfrage werden zufällig ausgewählte Personen, die im Besitz eines PKW-Führerscheins sind, befragt. Betrachtet werden folgende Ereignisse:
C: „Die Person ist älter als 60 Jahre.“
D: „Die Person befürwortet die Einführung eines Fahrtauglichkeitstests für Senioren.“
Erläutern Sie, was im Sachzusammenhang eine stochastische Unabhängigkeit der Ereignisse C und D bedeuten würde.
(Abitur 2020 Nachtermin Teil 1)

Lösungen

1 A: „Hotelgast ist jünger als 30“ $\Rightarrow P(A)=\frac{160}{800}=0,2$

B: „Lieblingssportart ist Tennis“ $\Rightarrow P(B)=\frac{240}{800}=0,3$

$A\cap B$: „Hotelgast ist jünger als 30 und seine Lieblingssportart ist Tennis“

$\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{48}{800}=0,06$

$P(A)\cdot P(B)=0,2\cdot 0,3=0,06=P(A\cap B)$

$\Rightarrow$ A und B sind stochastisch unabhängig

2 Vierfeldertafel:

	T	$\overline{T}$	
O	20	5	25
$\overline{O}$	20	5	25
	40	10	50

$P(O)=\frac{25}{50}=0,5 \quad P(T)=\frac{40}{50}=0,8 \quad P(O\cap T)=\frac{20}{50}=0,4$

$P(O)\cdot P(T)=0,5\cdot 0,8=0,4=P(O\cap T)$

$\Rightarrow$ Die Wahl von Orangensaft und Tee ist stochastisch unabhängig

3.1 Vierfeldertafel:

	K	$\overline{K}$	
U	80	10	90
$\overline{U}$	50	60	110
	130	70	200

$P(K)=\frac{130}{200}=0,65 \quad P(U)=\frac{90}{200}=0,45 \quad P(K\cap U)=\frac{80}{200}=0,4$

$P(K)\cdot P(U)=0,65\cdot 0,450,2925\neq P(K\cap U)$

$\Rightarrow$ Die Ereignisse K und U sind stochastisch abhängig

$\Rightarrow$ Es gibt einen Zusammenhang zwischen dem Verzehr von A-Kaviar und dem Auftreten von Unwohlsein

3.2 Vierfeldertafel:

	K	$\overline{K}$	
U	0,25	0,25	0,5
$\overline{U}$	0,25	0,25	0,5
	0,5	0,5	1

4.1

	E_1	$\overline{E_1}$	
E_2	$\frac{6}{37}$	$\frac{12}{37}$	$\frac{18}{37}$
$\overline{E_2}$	$\frac{6}{37}$	$\frac{13}{37}$	$\frac{19}{37}$
	$\frac{12}{37}$	$\frac{25}{37}$	1

$$P(E_1)\cdot P(E_2)=\frac{12}{37}\cdot\frac{18}{37}=\frac{216}{1369}\neq\frac{6}{37}\quad (P(E_1\cap E_2))$$

$\Rightarrow$ die Ereignisse E_1 und E_2 sind stochastisch abhängig

4.2 $P(E_1\cup E_2)=P(E_1)+P(E_2)-P(E_1\cap E_2)=\frac{12}{37}+\frac{18}{37}-\frac{6}{37}=\frac{24}{37}$

5.1

	F	$\overline{F}$	
S	0,4	0,3	0,7
$\overline{S}$	0,2	0,1	0,3
	0,6	0,4	1

$$P(F)\cdot P(S)=0{,}6\cdot 0{,}7=0{,}42\neq 0{,}40\quad (P(F\cap S))$$

$\Rightarrow$ die Ereignisse F und S sind stochastisch abhängig

5.2

$\overline{\overline{F}\cup S}=\overline{\overline{F}}\cap\overline{S}=F\cap\overline{S}$

"Es wird ein Fruchteis ohne Sahne bestellt"

$P(F\cap\overline{S})=0{,}2$

6.1 Vierfeldertafel:

	L	$\overline{L}$	
F	9	51	60
M	21	119	140
	30	170	200

$P(\{FL\})=\frac{9}{200}=0{,}045 \qquad P(\{F\overline{L}\})=0{,}255$

$P(\{ML\})=0{,}105 \qquad P(\{M\overline{L}\})=0{,}595$

6.2

$E=\overline{F\cup\overline{L}}=\overline{F}\cap L$

E: "Die befragte Person ist nicht weiblich und Linkshänder."

$P(E)=\frac{21}{200}=0{,}105$

6.3

$P(L)=\frac{30}{200}=0{,}15 \qquad P(F)=\frac{60}{200}=0{,}3 \qquad P(L\cap F)=0{,}045$

$P(L)\cdot P(F)=0{,}15\cdot 0{,}3=0{,}045=P(L\cap F)$

Die Ereignisse L und F sind stochastisch unabhängig, d.h.
die Eigenschaft "Linkshänder" hat nichts mit dem Geschlecht zu tun.

7.1 Vierfeldertafel:

	A	$\overline{A}$	
H	25	25	50
$\overline{H}$	50	50	100
	75	75	150

$P(A)=0{,}5 \quad P(H)=\frac{1}{3} \quad P(A\cap H)=\frac{1}{6}$

$P(A)\cdot P(H)=0{,}5\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}=P(A\cap H)$

Die Ereignisse A und H sind stochastisch unabhängig, d.h. das Tragen
der Handschuhe aus dem Discounter beeinflusst nicht den Ausschlag an den Händen.

7.2

$P(A\cup\overline{H})=P(A)+P(\overline{H})-P(A\cap\overline{H})=$

$=0{,}5+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{5}{6}\approx 0{,}8333$

8.1 Vierfeldertafel:

	B	T	
C	$\frac{3}{35}$	$\frac{43}{70}$	0,70
$\overline{C}$	$\frac{1}{70}$	$\frac{2}{7}$	0,30
	0,10	0,90	1

$E_1 = T \cup \overline{C}$

$P(E_1) = P(T) + P(\overline{C}) - P(T \cap \overline{C}) = 0{,}90 + 0{,}30 - \frac{2}{7} = \frac{32}{35}$

$E_2 = \overline{\overline{C} \cup B} = C \cap \overline{B} \quad P(E_2) = \frac{43}{70}$

E_2 :"Kunde bucht Touristenklasse und zahlt mit Kreditkarte"

8.2

$P(B) \cdot P(C) = 0{,}10 \cdot 0{,}70 = 0{,}07 \neq 0{,}0857 = P(B \cap C)$

$\Rightarrow$ B und C stochastisch abhängig;

Der Anteil der Kreditkartenzahler insgesamt entspricht nicht dem Anteil der Kreditkartenzahler in der Businessklasse.

9 Vierfeldertafel:

	M	$\overline{M}$	
H	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	0,5
$\overline{H}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	0,50
	0,75	0,25	1

$P(M) \cdot P(H) = 0{,}75 \cdot 0{,}50 = 0{,}375 = P(M \cap H)$

$\Rightarrow$ M und H stochastisch unabhängig;

Auch bei anderen Schuhmarken treten genauso häufig Hautreizungen auf.

10 Vierfeldertafel:

	G	H	
S	30	40	70
$\overline{S}$	50	180	230
	80	220	300

$P(G)=\frac{80}{300}=\frac{4}{15}\quad P(S)=\frac{70}{300}=\frac{7}{30}\quad P(G\cap S)=0{,}1$

$P(G)\cdot P(S)=\frac{4}{15}\cdot\frac{7}{30}=\frac{14}{225}\neq 0{,}1=P(G\cap S)$

$\Rightarrow$ G und S stochastisch abhängig;

Der Kauf des Gasgrills hängt von der Haushaltsgröße ab.

11 Vierfeldertafel:

	M	$\overline{M}$	
N	0,08	0,04	0,12
$\overline{N}$	$\frac{168}{400}=0{,}42$	0,46	0,88
	0,5	0,5	1

$P(M)\cdot P(N)=0{,}5\cdot 0{,}12=0{,}06\neq P(M\cap N)=0{,}08$

$\Rightarrow$ M und N sind stochastisch abhängig

12.1 Vierfeldertafel:

	A	$\overline{A}$	
E	0,208	0,442	0,65
$\overline{E}$	0,112	0,238	0,35
	0,32	0,68	1

a) $P\left(\overline{A}\cap\overline{E}\right)=0{,}238$

b) $P(A\cap\overline{E})+P(\overline{A}\cap E)=0{,}112+0{,}442=0{,}554$

c) $1-P(A\cap E)=1-0{,}208=0{,}792$

12.2

$P\left(\overline{\overline{A}\cap E}\right)=P\left(A\cup\overline{E}\right)=P(A)+P(\overline{E})-P\left(A\cap\overline{E}\right)=$

$=0{,}32+0{,}35-0{,}112=0{,}558$

$\overline{\overline{A}\cap E}$:"Anna trifft oder Eva trifft nicht."

12.3

$P(A)\cdot P(E)=0{,}32\cdot 0{,}65=0{,}208=P(A\cap E)$

$\Rightarrow$ A und E sind stochastisch unabhängig

13.1 Vierfeldertafel:

	A	B	
V	0,56	0,14	0,7
$\overline{V}$	0,24	0,06	0,3
	0,8	0,2	1

$P(A)\cdot P(V)=0{,}8\cdot 0{,}7=0{,}56=P(A\cap V)$

$\Rightarrow$ A und V sind stochastisch unabhängig

Die Wahl des Hustensaftes hängt nicht von der Verbesserung der Symptome ab.

13.2 $P(\overline{A}\cup V)=P(\overline{A})+P(V)-P(\overline{A}\cap V)=0{,}2+0{,}7-0{,}14=0{,}76$

14

$P(E_6)=0{,}6 \quad P(E_7)=0{,}3 \quad P(E_6\cap \overline{E_7})=0{,}42$

$\text{Vereinbar}: E_6\cap E_7 \overset{!}{=} \{\ \}$

$P(E_6)=P(E_6\cap E_7)+P(E_6\cap \overline{E_7})$

$P(E_6\cap E_7)=0{,}18 \quad \Rightarrow E_6\cap E_7\neq\{\ \}$

$\Rightarrow E_6$ und E_7 vereinbar

$P(E_6)\cdot P(E_7)=0{,}6\cdot 0{,}3=0{,}18=P(E_6\cap E_7)$

$\Rightarrow E_6$ und E_7 stochastisch unabhängig

15.1 Vierfeldertafel:

	N	$\overline{N}$	
S	0,08	0,22	0,3
$\overline{S}$	0,2	0,5	0,5
	0,28	0,72	1

$P\left(\overline{N}\cap S\right)=0{,}22$

15.2

$P(N)\cdot P(S)=0{,}28\cdot 0{,}3=0{,}084\neq 0{,}08=P(N\cap S)$

$\Rightarrow$ Die Ereignisse N und S sind stochastisch abhängig.

16 Vierfeldertafel:

	K	$\overline{K}$	
V	120	60	180
$\overline{V}$	200	20	220
	320	80	400

$E_4 = \overline{K \cup \overline{V}} = \overline{K} \cap V \qquad P(E_4) = \frac{60}{400} = 0{,}15$

60 Spieler bekommen eine gelbe Karte für keinen unerlaubten Körperkontakt.

17 Die Befürwortung der Einführung eines Fahrtauglichkeitstests für Senioren ist bei allen Befragten genau so groß wie bei den über 60-jährigen.